

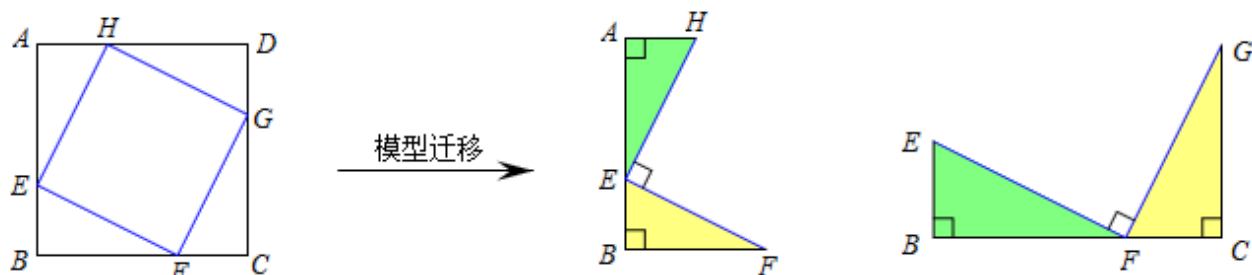
第2讲 正方形中的三垂直与半角模型

一、三垂直模型

勾股弦图

基本模型及迁移

外弦图：



一线三垂直——"K"字模型

【教法备注】

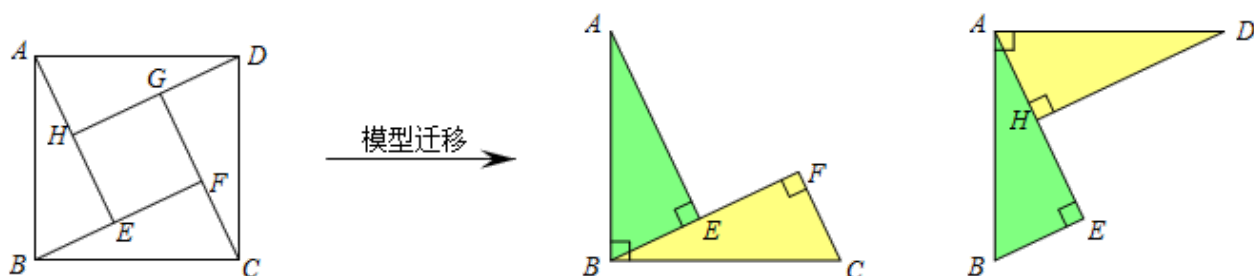
结论：

$$\triangle HAE \cong \triangle EBF \cong \triangle FCG$$

$$BC = EB + CG \text{ (右图)}$$

方法：遇到直线上出现两个直角的题型可以考虑构造一线三垂直模型进行证明计算。

内弦图：



一线三垂直——"L"字模型

【教法备注】

结论：

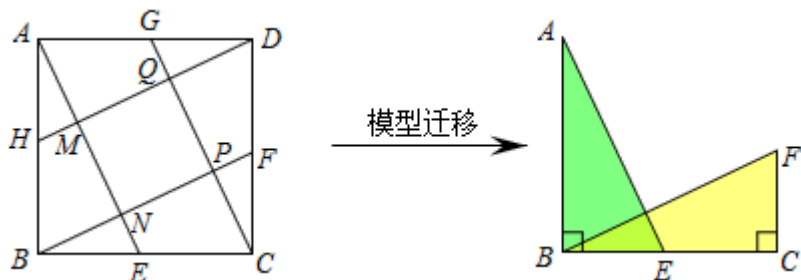
$$\triangle ABE \cong \triangle BCF \cong \triangle DAH$$

$$AE - CF = EF \text{ (左图)} .$$

方法：遇到直线上出现两个直角的题型可以考虑构造一线三垂直模型进行证明计算。

变形

在正方形 $ABCD$ 中， $AH = BE = CF = DG$ 。



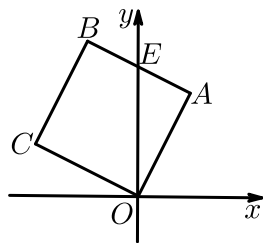
【教法备注】

结论：利用SAS推出 $\triangle DAH \cong \triangle ABE \cong \triangle BCF \cong \triangle CDG$ ，从而推出 $DH = AE = BF = CG$ ， $AE \perp BF$ ，四边形 $MNPQ$ 为正方形。

注意：本模型与“L”模型有区别，如果“L”模型无法解题，可以考虑构造本模型进行证明计算。

例题1

- 如图，已知边长为1的正方形 $OABC$ 在直角坐标系中， B, C 两点在第二象限内， OA 与 x 轴的夹角为 60° ，那么 C 点的坐标是 _____， B 点的坐标是 _____。



【答案】 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$; $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$

【解析】由题意得 $\angle COF = 30^\circ$ 。

过 C 作 $CF \perp x$ 轴于 F ，过 B 作 $BH \perp x$ 轴，过 C 作 $CH \perp y$ 轴交于点 H 。

在 $Rt\triangle COF$ 中，

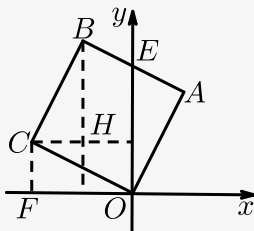
$$CO = 1.$$

$$CF = \frac{1}{2}CO = \frac{1}{2}.$$

$\therefore$

$$OF = \sqrt{CO^2 - CF^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore C(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}).$$



同理，在 $\text{Rt}\triangle CBH$ 中，

$$CH = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}.$$

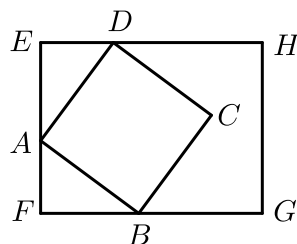
$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right).$$

【标注】【知识点】勾股定理的综合应用

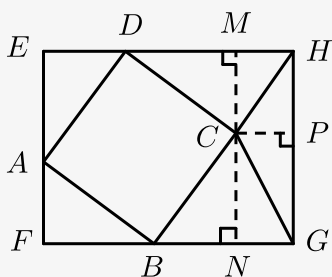
练习1

2. 如图，正方形 $ABCD$ 的三个顶点 A 、 B 、 D 分别在长方形 $EFGH$ 的边 EF 、 FG 、 EH 上，且 C 到 HG 的距离是1，到点 H 、 G 的距离分别为 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{10}$ ，则正方形 $ABCD$ 的面积为 _____ .



【答案】 13

【解析】 过点 C 作 $CP \perp HG$ 于 P ， $CM \perp EH$ 于 M ， $CN \perp FG$ 于 N ，连接 CH ， CG 。



$$\because C \text{ 到 } HG \text{ 距离为 } 1, CH = \sqrt{5}, CG = \sqrt{10},$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle CPH \text{ 中}, HP = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle CPG \text{ 中}, GP = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 1^2} = 3,$$

$$\therefore MC = 2, CN = 3,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$$\therefore \angle DCB = 90^\circ, \angle DCM + \angle BCN = 90^\circ, DC = BC,$$

$$\text{又 } \angle MDC + \angle DCM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MDC = \angle BCN,$$

又 $\because \angle DMC = \angle CNB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle DMC \cong \triangle CNB$ (AAS),

$\therefore DM = CN = 3$,

在Rt $\triangle DMC$ 中, $DC = \sqrt{DM^2 + MC^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$,

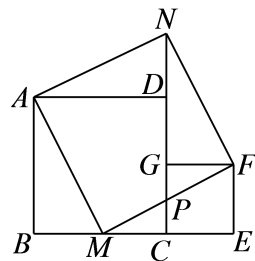
$\therefore S_{\text{正}ABCD} = (\sqrt{13})^2 = 13$.

故答案为13.

【标注】【知识点】正方形的性质

3. 如图放置的两个正方形, 大正方形 $ABCD$ 边长为 a , 小正方形 $CEFG$ 边长为 b ($a > b$), M 是 BC 边上一个动点, 联结 AM , MF , MF 交 CG 于点 P , 将 $\triangle ABM$ 绕点 A 旋转至 $\triangle ADN$, 将 $\triangle MEF$ 绕点 F 旋转恰好至 $\triangle NGF$. 给出以下三个结论: ① $\angle AND = \angle MPC$; ② $\triangle ABM \cong \triangle NGF$; ③ $S_{\text{四边形}AMFN} = a^2 + b^2$.

其中正确的结论是 _____ (请填写序号).



【答案】 ①②③

【解析】 ① $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle BAD = \angle ADC = \angle B = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAM + \angle DAM = 90^\circ$,

$\therefore$ 将 $\triangle ABM$ 绕点 A 旋转至 $\triangle ADN$,

$\therefore \angle NAD = \angle BAM$, $\angle AND = \angle AMB$,

$\therefore \angle DAM + \angle NAD = \angle NAD + \angle AND = \angle AND + \angle NAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAM = \angle AND$,

$\therefore \angle DAM = \angle AMB$, $\angle AMB + \angle PMC = 90^\circ$, $\angle PMC + \angle MPC = 90^\circ$,

$\therefore \angle AMB = \angle MPC$,

$\therefore \angle AND = \angle MPC$, 故①正确;

② $\because$ 将 $\triangle MEF$ 绕点 F 旋转至 $\triangle NGF$,

$\therefore GN = ME$,

$\therefore AB = a$, $ME = a$,

$$\therefore AB = ME = NG,$$

在 $\triangle ABM$ 与 $\triangle NGF$ 中,

$$\begin{cases} AB = NG = a \\ \angle B = \angle NGF = 90^\circ, \\ GF = BM = b \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle NGF$; 故②正确;

③: 将 $\triangle ABM$ 绕点 A 旋转至 $\triangle ADN$,

$$\therefore AM = AN,$$

将 $\triangle MEF$ 绕点 F 旋转至 $\triangle NGF$,

$$\therefore NF = MF,$$

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle NGF$,

$$\therefore AM = NF,$$

$\therefore$ 四边形 $AMFN$ 是矩形,

$$\therefore \angle BAM = \angle NAD,$$

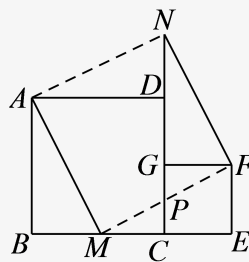
$$\therefore \angle BAM + \angle DAM = \angle NAD + \angle DAN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NAM = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $AMFN$ 是正方形,

$$\therefore \text{在Rt}\triangle ABM\text{中}, a^2 + b^2 = AM^2,$$

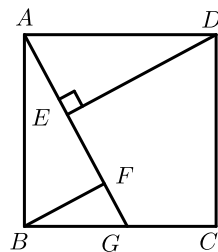
$$\therefore S_{\text{四边形}AMFN} = AM^2 = a^2 + b^2; \text{故③正确}.$$



【标注】【知识点】三垂直模型

|| 例题2

4. 正方形 $ABCD$ 中, 点 G 为 BC 上任意一点, $DE \perp AG$ 于 E , $BF \parallel DE$ 交 AG 于 F .



(1) 若点 G 为 BC 的中点, $AB = 4$, $FG = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 求 EF 的长.

(2) 求证: $AF - BF = EF$.

【答案】 (1) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) $\because DE \perp AG, BF \parallel DE,$

$$\therefore BF \perp AG,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle BAF = 90^\circ,$$

$\because$ 正方形 $ABCD,$

$$\therefore AB = AD, \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle BAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle ABF,$$

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle DAE$ 中

$$\begin{cases} \angle ABF = \angle DAE \\ \angle BFA = \angle AED = 90^\circ, \\ AB = DA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DAE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = BF,$$

$$\text{又} \because G \text{ 为 } BC \text{ 的中点, } AB = 4, FG = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore BG = 2, AG = 2\sqrt{5}, BF = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore EF = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

(2) 由已知和 (1) 可知, 当 G 为 BC 上任意一点时,

始终存在 $\triangle ABF \cong \triangle DAE,$

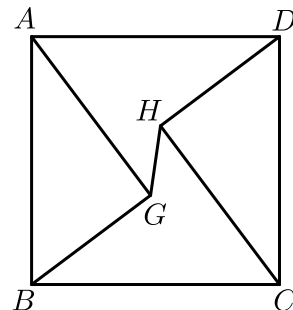
$$\therefore AE = BF,$$

$$\therefore EF = AF - AE = AF - BF.$$

【标注】【知识点】三垂直模型

练习2

5. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 10, $AG = CH = 8, BG = DH = 6$, 连接 GH , 则线段 GH 的长为 ().



A. $\frac{8\sqrt{3}}{5}$

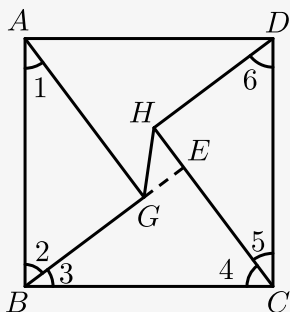
B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{14}{5}$

D. $10 - 5\sqrt{2}$

【答案】 B

【解析】 如图，延长 BG 交 CH 于点 E ，



在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle CDH$ 中，

$$\begin{cases} AB = CD = 10 \\ AG = CH = 8 \\ BG = DH = 6 \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle CDH$,

$$AG^2 + BG^2 = AB^2,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 5, \angle 2 = \angle 6, \angle AGB = \angle CHD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \angle 5 + \angle 6 = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ, \angle 4 + \angle 5 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3 = \angle 5, \angle 2 = \angle 4 = \angle 6,$$

在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 3 \\ AB = BC \\ \angle 2 = \angle 4 \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle BCE$,

$$\therefore BE = AG = 8, CE = BG = 6, \angle BEC = \angle AGB = 90^\circ,$$

$$\therefore GE = BE - BG = 8 - 6 = 2,$$

同理可得 $HE = 2$,

$$\text{在Rt}\triangle GHE\text{中}, GH = \sqrt{GE^2 + HE^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

故选B.

【标注】 【知识点】 正方形的性质

6. 某兴趣小组在数学课外活动中，研究三角形和正方形的性质时，做了如下探究：

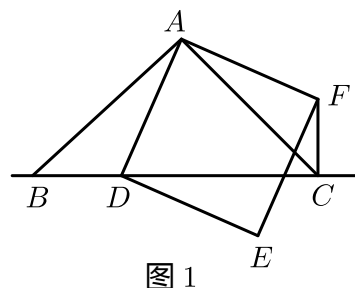
在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 D 为直线 BC 上一动点（点 D 不与 B ， C 重合），以 AD 为边在 AD 右侧作正方形 $ADEF$ ，连接 CF 。

（1）观察猜想：

如图1，当点 D 在线段 BC 上时，

① BC 与 CF 的位置关系为：_____。

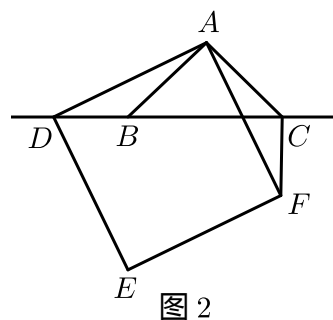
② BC , CD , CF 之间的数量关系为：_____（结论直接写在横线上）。



(2) 数学思考：

如图2，当点 D 在线段 CB 的延长线上时，结论①，②是否仍然成立？若成立，请给予证明。

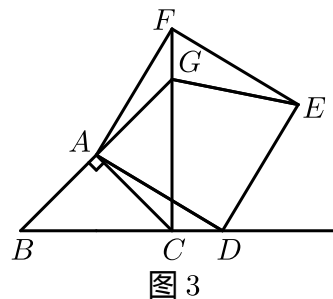
若不成立，请你写出正确结论再给予证明。



(3) 拓展延伸：

如图3，当点 D 在线段 BC 的延长线上时，延长 BA 交 CF 于点 G ，连接 GE 。若已知

$AB = 2\sqrt{2}$, $CD = \frac{1}{4}BC$, 请求出 GE 的长。



【答案】 (1) $BC \perp CF$; $BC = CF + CD$

(2) ①成立；②不成立， $BC = CD - CF$

(3) $EG = \sqrt{10}$.

【解析】 (1) $\because$ 四边形 $ADEF$ 为正方形，

$\therefore AD = AF$, $\angle DAF = 90^\circ$,

$\because AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAF$,

$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACF, \\
&\therefore \angle ABD = \angle ACF = 45^\circ, CF = BD, \\
&\therefore \angle ACB = 45^\circ, \\
&\therefore \angle BCF = 90^\circ, BC \perp CF, \\
&\therefore BC = BD + CD = CF + CD.
\end{aligned}$$

(2) 结论不成立, $BC = CD - CF$.

$$\begin{aligned}
&\therefore \text{四边形} ADEF \text{ 为正方形}, \\
&\therefore AD = AF, \angle DAF = 90^\circ, \\
&\therefore AB = AC, \angle BAC = 90^\circ, \\
&\therefore \angle DAB = \angle FAC, \\
&\therefore \triangle ADB \cong \triangle AFC, \\
&\therefore \angle ACF = \angle ABD = 135^\circ, CF = BD, \\
&\therefore \angle ACB = 45^\circ, \\
&\therefore \angle DCF = 90^\circ, CD = BD + BC = CF + BC, \\
&\therefore BC = CD - CF.
\end{aligned}$$

(3) $\therefore$ 四边形 $ADEF$ 为正方形,

$$\begin{aligned}
&\therefore AD = AF, \angle DAF = 90^\circ, \\
&\therefore AB = AC, \angle BAC = 90^\circ, \\
&\therefore \angle BAD = \angle CAF, \\
&\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACF, \\
&\therefore \angle ACF = \angle ABC = 45^\circ, \\
&\therefore \angle BCF = \angle ACB + \angle ACF = 90^\circ, \\
&\therefore CA \perp BG, \angle ABC = 45^\circ, \\
&\therefore \triangle BCG \text{ 为等腰直角三角形}, \\
&\therefore AB = 2\sqrt{2}, \\
&\therefore AC = AG = AB = 2\sqrt{2}, \\
&\therefore BC = 4, \\
&\therefore CD = \frac{1}{4}BC, \\
&\therefore CD = 1.
\end{aligned}$$

过点 A 作 $AM \perp CF$,

$\therefore$ 点 A 为 BG 中点,

$$\therefore AM = \frac{1}{2}BC = 2, GM = \frac{1}{2}GC = 2,$$

$\therefore AC = AG, AD = AF, \angle FAG = \angle DAC,$

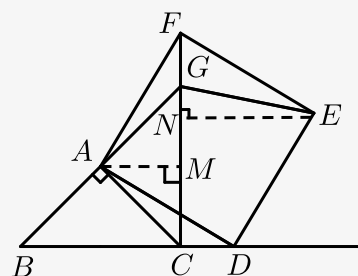


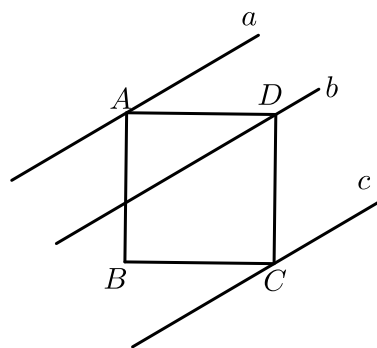
图 3

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AGF$,
 $\therefore GF = CD = 1$,
 在 $\text{Rt}\triangle AMF$ 中 , $AF^2 = AM^2 + MF^2 = 2^2 + 3^2 = 13$,
 过点 E 作 $EN \perp CF$,
 $\therefore EF = AF$, $\angle CNE = \angle AMF = 90^\circ$, $\angle EFN + \angle AFM = 90^\circ$,
 $\angle AFM + \angle FAM = 90^\circ$,
 $\therefore \angle FAM = \angle EFM$,
 $\therefore \triangle EFN \cong \triangle FAM$,
 $\therefore FN = AM = 2$,
 $\therefore GN = 1$, $EN = FM = 3$,
 在 $\text{Rt}\triangle EGN$ 中 , $EG^2 = EN^2 + GN^2 = 10$,
 $\therefore EG = \sqrt{10}$.

【标注】【知识点】等腰直角三角形的判定；全等三角形的对应边与角；勾股定理的综合应用

|| 例题3

7. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，直线 a, b, c 分别通过 A, D, C 三点，且 $a \parallel b \parallel c$. 若 a 与 b 之间的距离是 5， b 与 c 之间的距离是 7，则正方形 $ABCD$ 的面积是（ ）.



A. 70

B. 74

C. 144

D. 148

【答案】 B

【解析】 如图：过点 A 作 $AM \perp$ 直线 b 于点 M ，过点 D 作 $DN \perp$ 直线 c 于点 N ，

则 $\angle AMD = \angle DNC = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 直线 $b \parallel$ 直线 c ， $DN \perp$ 直线 c ，

$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AD = DC, \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

在 $\triangle AMD$ 和 $\triangle CND$ 中,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 3 \\ \angle AMB = \angle CND, \\ AD = DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AMD \cong \triangle CND,$$

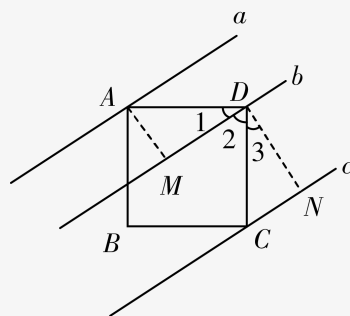
$$\therefore AM = CN,$$

$\therefore a$ 与 b 之间的距离是5, b 与 c 之间的距离是7,

$$\therefore AM = CN = 5, DN = 7,$$

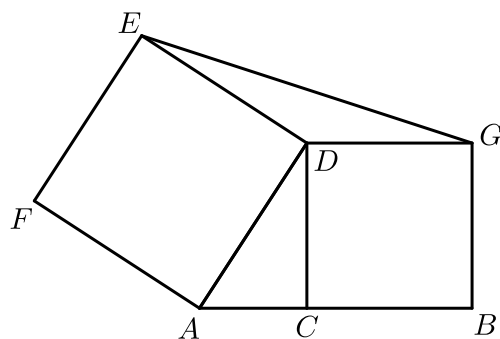
在 $\text{Rt}\triangle DNC$ 中, 由勾股定理得: $DC^2 = DN^2 + CN^2 = 7^2 + 5^2 = 74$,

即正方形 $ABCD$ 的面积为74.



【标注】【知识点】正方形与全等综合

8. 如图, C 为线段 AB 上一点, 正方形 $ADEF$ 和正方形 $BCDG$ 的面积分别为 10cm^2 和 5cm^2 , 则 $\triangle EDG$ 的面积为() cm^2 .



A. $\frac{5}{2}$

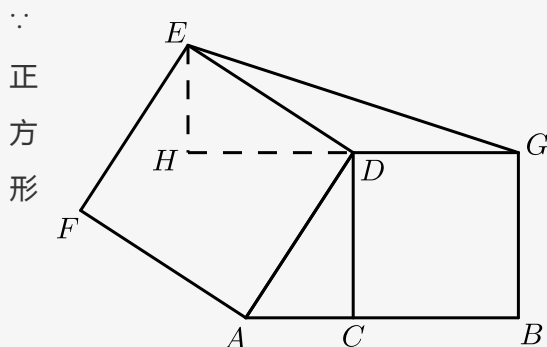
B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 A

【解析】 过点 E , 作 $EH \perp DG$ 于点 H ,



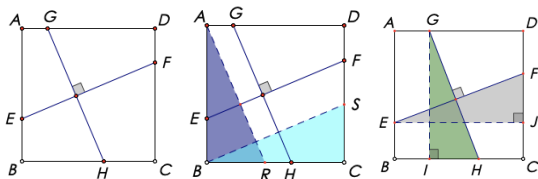
$ADEF$ 的面积为 10cm^2 ,

$$\begin{aligned}
&\therefore DE = \sqrt{10}\text{cm}, \\
&\therefore \text{正方形 } BCDG \text{ 的面积为 } 5\text{cm}^2, \\
&\therefore DG = \sqrt{5}\text{cm}, \\
&\therefore \angle EDA = \angle HDC = 90^\circ, \\
&\therefore \angle EDH = \angle ADC, \\
&\text{又 } \therefore \angle EHD = \angle DCA = 90^\circ, DE = DA, \\
&\therefore \triangle EDH \cong \triangle ADC, \\
&\therefore DH = DC = \sqrt{5}, \\
&\text{在 Rt}\triangle EDH \text{ 中}, \\
&\therefore EH = \sqrt{DE^2 - DH^2} = \sqrt{5}, \\
&\therefore S_{\triangle EDG} = \frac{1}{2} \times DG \times EH = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】正方形与全等综合

🔗 弦图变形拓展——十字模型：有相等能证垂直，有垂直能证相等。（前提：题干中给出图形）

①正方形 $ABCD$ 中，若 $EF \perp GH$ ，则可证： $EF = GH$

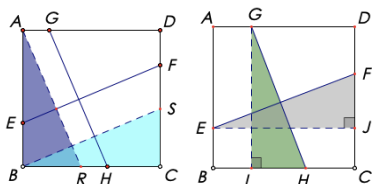


【教法备注】

证明方法1：平移后证 $\triangle ABR \cong \triangle BCS$ (AAS)

证明方法2：作垂证 $\triangle EGF \cong \triangle GIH$

②正方形 $ABCD$ 中，若 $EF = GH$ ，则可证：_____



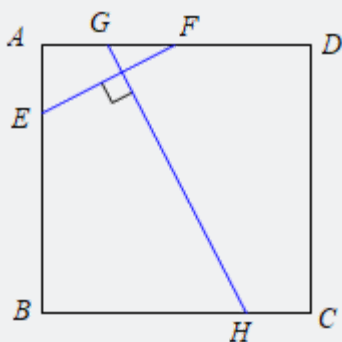
【教法备注】

可证： $EF \perp GH$ （证法同上）

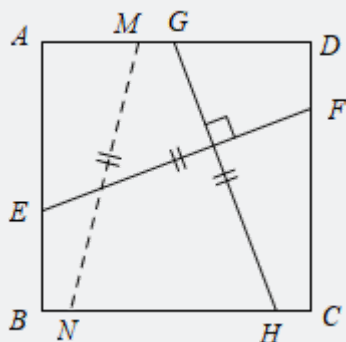
注意：

① “十字模型”——前提条件：对边取点连线

反例：如图：虽然 $EF \perp GH$ ，但由于 GH 并不是对边取点所连线段，所以 EF 并不一定等于 GH



② “十字模型”——前提条件：题干给出图形，
才会有已知相等证出垂直，若没有图形，不一定垂直，如下图的 EF 和 MN



例题4

9. 请回答下列各题：

- (1) 如图1，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上， AE 、 BF 交于点 O ，
 $\angle AOF = 90^\circ$. 求证： $BE = CF$.

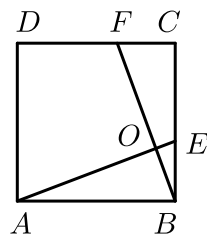


图 1

- (2) 如图2，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 H 、 F 、 G 分别在边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上， EF 、 GH 交于点 O ， $\angle FOH = 90^\circ$ ， $EF = 4$. 求 GH 的长 .

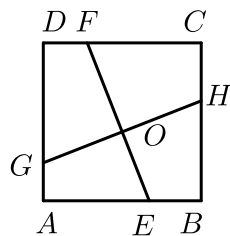


图 2

(3) 已知点 E 、 H 、 F 、 G 分别在矩形 $ABCD$ 的边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上， EF 、 GH 交于点 O ， $\angle FOH = 90^\circ$ ， $EF = 4$ 。直接写出下列两题的答案：

① 如图3，矩形 $ABCD$ 由2个全等的正方形组成，则 $GH = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

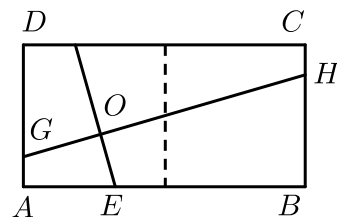


图 3

② 如图4，矩形 $ABCD$ 由 n 个全等的正方形组成，则 $GH = \underline{\hspace{2cm}}$ （用 n 的代数式表示）。

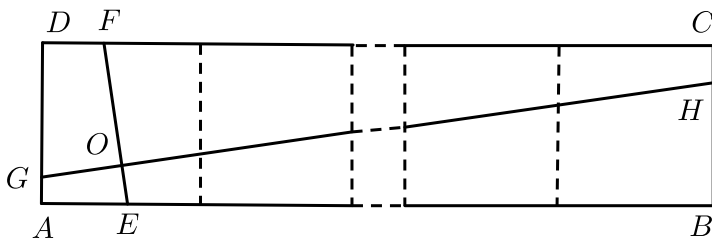


图 4

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 4。

(3) ① 8

② $4n$

【解析】(1) 如图， $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$$\therefore AB = BC, \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$$

,

$$\therefore \angle EAB + \angle AEB = 90^\circ,$$

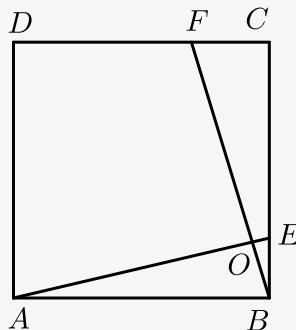
$$\therefore \angle EOB = \angle AOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBC + \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle FBC,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF,$$

$$\therefore BE = CF.$$



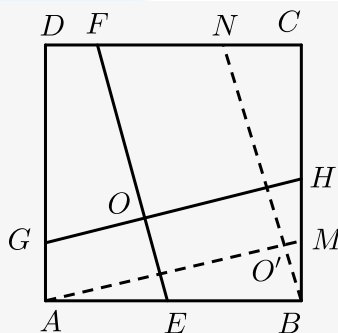
(2) 方法一：如图，过点 A 作 $AM \parallel GH$ 交 BC 于 M ，

过点 B 作 $BN \parallel EF$ 交 CD 于 N ，

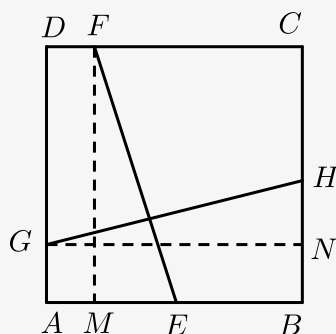
AM 与 BN 交于点 O' ，则四边形

$AMHG$ 和四边形 $BNFE$ 均为平行四边形，

$\therefore EF = BN, GH = AM,$
 $\therefore \angle FOH = 90^\circ, AM \parallel GH,$
 $EF \parallel BN,$
 $\therefore \angle NO'A = 90^\circ,$
 故由 (1) 得, $\triangle ABM \cong \triangle BCN, \therefore$
 $AM = BN,$
 $\therefore GH = EF = 4.$



方法二：过点 F 作 $FM \perp AB$ 于 M ，
 过点 G 作 $GN \perp BC$ 于 N ，
 得 $FM = GN$ ，由 (1) 得，
 $\angle HGN = \angle EFM$ ，
 得 $\triangle FME \cong \triangle GNH$ ，
 得 $FE = GH = 4.$



(3) ① $\because$ 是两个正方形，则 $GH = 2EF = 8.$

② $4n.$

【标注】【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

【知识点】全等三角形的性质

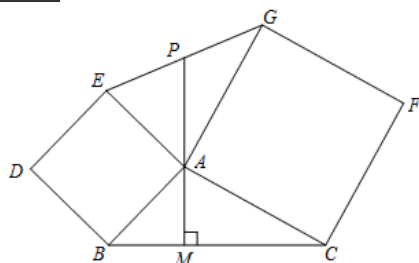
【知识点】平行四边形的性质及应用

【知识点】正方形的性质

独步天下

双正方形模型 (三垂综合应用)

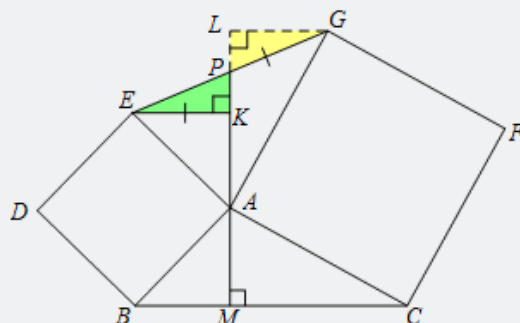
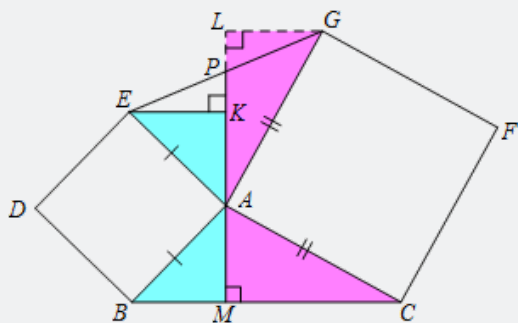
以 $\triangle ABC$ 的 AB 、 AC 边向外分别作正方形 $ABDE$ 、 $ACFG$ ， $AM \perp BC$ ， AM 反向延长线交 EG 于 P ，则点 P 为 EG 中点， $BC = 2AP$ 。



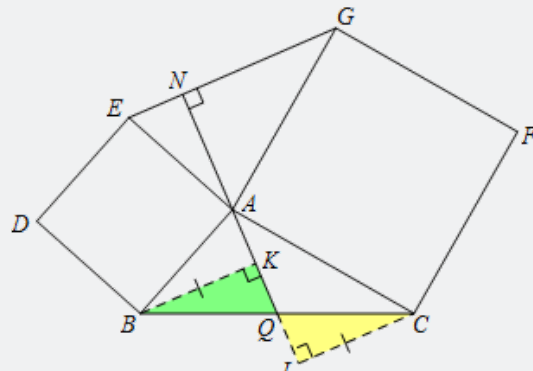
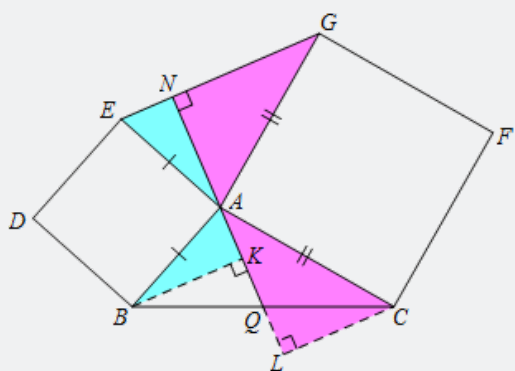
【教法备注】

辅助线：(利用一线三垂直解题)

- ①过点 E 作 $EK \perp MP$ 于 K ，过点 G 作 $GL \perp MP$ 的延长线于点 L ，
- ②易证 $\triangle AMB \cong \triangle EKA$ ， $\triangle AMC \cong \triangle GLA$ ，从而得到 $AM = EK = GL$ ，
- ③利用AAS推出 $\triangle PEK \cong \triangle PGL$ ，从而得到点 P 为 EG 中点， $PK = PL$ ，
- ④根据 $BM = AK$ ， $CM = AL$ ， $PK = PL$ ，可推出 $BC = 2AP$ 。

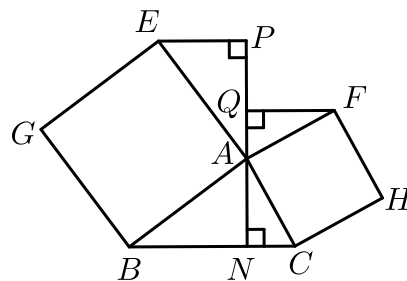


【变形】若条件变成 $AN \perp EG$ ， AN 反向延长线交 BC 于 Q ，则点 Q 为 BC 中点， $EG = 2AQ$ 。



练习4

10. 已知：如图， $\triangle ABC$ 中，分别以 AB 、 AC 为一边向 $\triangle ABC$ 外作正方形 $ABGE$ 和 $ACHF$ ，直线 $AN \perp BC$ 于 N ，若 $EP \perp AN$ 于 P ， $FQ \perp AN$ 于 Q 。判断线段 EP 、 FQ 的数量关系，并证明。



【答案】 $EP = FQ$ 。

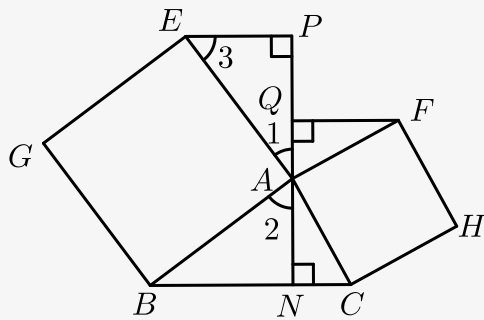
【解析】线段 EP 、 FQ 的数量关系为相等。

$$\because EP \perp AN, AN \perp BC,$$

$$\therefore \angle P = \angle ANB = 90^\circ,$$

$$\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ.$$

又：四边形 $ABGE$ 是正方形，



$$\therefore \angle EAB = 90^\circ, AE = AB,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 2.$$

$$\therefore \triangle EPA \cong \triangle ANB \text{ (AAS)},$$

$$\therefore EP = AN.$$

同理可证 $\triangle QFA \cong \triangle NAC$

$$\therefore FQ = AN.$$

$$\therefore EP = FQ.$$

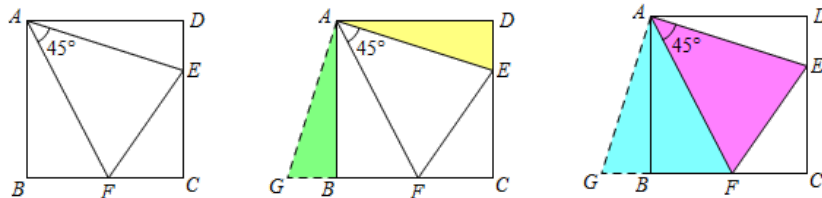
【标注】【知识点】三垂直模型

二、角含半角模型

|| 正方形角含半角的和差关系

🕒 半角在倍角内

如图，正方形 $ABCD$ ，点 E 在边 CD 上，点 F 在边 BC 上， $\angle EOF = 45^\circ$ 。



【教法备注】

辅助线：延长 BC 至点 G ，使 $BG = DE$ ，连接 AG 。（补短法）

结论：

① 补短全等： $\triangle ABG \cong \triangle ADE$ ，理由 SAS。

② 对称全等： $\triangle FAG \cong \triangle FAE$ ，理由 SAS。

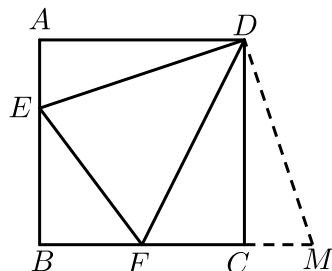
③ $EF = BF + DE$ ，进而推出 $\triangle CEF$ 的周长等于正方形周长的一半。

④ AF 平分 $\angle BFE$, AE 平分 $\angle DEF$.

⑤ A 到 EF 的距离是正方形的边长

例题5

11. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为3, E, F 分别是 AB, BC 边上的点, 且 $\angle EDF = 45^\circ$. 将 $\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle DCM$. 若 $AE = 1$, 则 FM 的长为 _____.



【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】 $\because \triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle DCM$,

$$\therefore \angle FCM = \angle FCD + \angle DCM = 180^\circ,$$

$\therefore F, C, M$ 三点共线,

$$\therefore DE = DM, \angle EDM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF + \angle FDM = 90^\circ.$$

$$\because \angle EDF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FDM = \angle EDF = 45^\circ.$$

又 $\because DF$ 为公共边,

$$\therefore \triangle DEF \cong \triangle DMF,$$

$$\therefore EF = MF.$$

设 $EF = MF = x$,

$$\because AE = CM = 1, \text{ 且 } BC = 3,$$

$$\therefore BM = BC + CM = 3 + 1 = 4,$$

$$\therefore BF = BM - MF = BM - EF = 4 - x,$$

$$\because EB = AB - AE = 3 - 1 = 2.$$

$$\text{在 Rt}\triangle EBF \text{ 中, } EB^2 + BF^2 = EF^2,$$

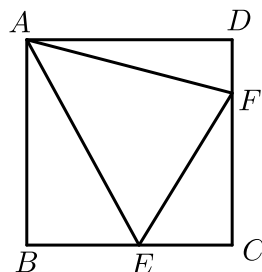
$$\text{即 } 2^2 + (4 - x)^2 = x^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{2},$$

$$\therefore FM = \frac{5}{2}.$$

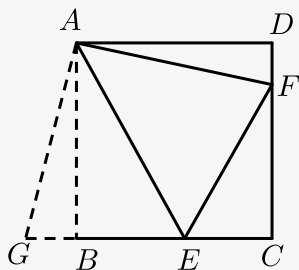
练习5

12. 如图，正方形 $ABCD$ 中，已知 $AB = \sqrt{3}$ ，点 E 、 F 分别在 BC 、 CD 上，若 $\angle BAE = 30^\circ$ ， $\angle DAF = 15^\circ$ ，则 $\triangle AEF$ 的面积为 _____。



【答案】 $3 - \sqrt{3}$

【解析】延长 CB 至 G ，使 $BG = DF$ ，连接 AG 。



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
 $\therefore AB = AD$ 、 $\angle ABG = \angle D = 90^\circ$ ，
 $\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF (SAS)$ ，
 $\therefore AG = AF$ 、 $\angle BAG = \angle DAF = 15^\circ$ ，
 又 $\because \angle BAE = 30^\circ$ ，
 $\therefore \angle GAE = \angle FAE = 45^\circ$ ，
 $\therefore \triangle AEG \cong \triangle AEF (SAS)$ ，
 $\therefore EG = EF$ ，
 $\therefore EF = BE + DF$ 。设 $EF = a$ ，
 $\because AB = \sqrt{3}$ ，
 $\therefore BE = 1$ ，
 $\therefore DF = a - 1$ ，
 $\therefore CE = \sqrt{3} - 1$ 、 $CF = \sqrt{3} + 1 - a$ ，
 在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中 $EF^2 = CE^2 + CF^2$ ，

$$\therefore a^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1 - a)^2,$$

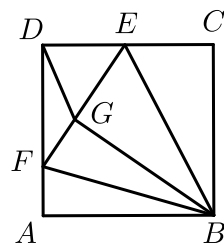
$$\text{解得 } a = 2\sqrt{3} - 2,$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = S_{\triangle AEG} = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3} - 2) \times \sqrt{3} = 3 - \sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】多边形中的半角模型

|| 例题6

13. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为1， $\angle EBF = 45^\circ$ ，过点 B 作 $BG \perp EF$ 于 G 。下列说法：①若 $AF = \frac{1}{3}$ ，则 $DG \parallel EB$ ；②若 E 为 CD 的中点，则 $\triangle GDE$ 的面积为 $\frac{1}{15}$ ；③若 $AF = CE$ ，则 $AF = \sqrt{2} - 1$ ；④ $AF \cdot CE + BG \cdot EF = 1$ 。其中正确的是（ ）。



A. ①②③

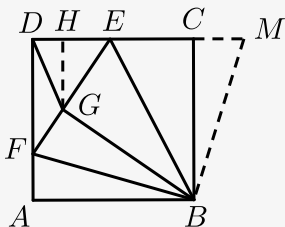
B. ①②④

C. ①③④

D. ②③④

【答案】C

【解析】延长 DC 至 M ，使得 $CM = AF$ ，连结 BM ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AB = BC = CD = AD,$$

$$\angle BAD = \angle BCD = \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle BCM = 90^\circ,$$

在 $\triangle BAF$ 和 $\triangle BCM$ 中，

$$\begin{cases} BA = BC \\ \angle BAF = \angle BCM, \\ AF = CM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAF \cong \triangle BCM,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle CBM, AF = CM, BF = BM,$$

$$\therefore \angle EBF = 45^\circ,$$

$\therefore \angle ABF + \angle CBE = 45^\circ$,
 $\therefore \angle CBM + \angle CBE = 45^\circ$,
 $\therefore \angle EBF = \angle EBM = 45^\circ$,
 在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle BEM$ 中 ,

$$\begin{cases} BF = BM \\ \angle EBF = \angle EBM , \\ BE = BE \end{cases}$$

 $\therefore \triangle BEF \cong \triangle BEM$,
 $\therefore EF = EM$, $\angle BEM = \angle BEF$,
 $\therefore BG \perp EF$, $BC \perp EM$,
 $\therefore BG = BC = AB$,
 在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 和 $\text{Rt}\triangle BGE$ 中 ,

$$\begin{cases} BG = BC \\ BE = BE \end{cases}$$

 $\therefore \text{Rt}\triangle BCE \cong \text{Rt}\triangle BGE$,
 $\therefore EC = EG$, $\angle BEC = \angle BEG$,
 $\therefore EF - EG = EM - EC$,
 $\therefore FG = CM = AF$, $EF = AF + CE$,
 当 $AF = \frac{1}{3}$ 时 , $FG = \frac{1}{3}$, $DF = \frac{2}{3}$,
 设 $EC = EG = x$, $DE = 1 - x$,
 $EF = x + \frac{1}{3}$,
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中 , $DE^2 + DF^2 = EF^2$,
 $\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^2 + (1 - x)^2 = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2$,
 解得 $x = \frac{1}{2}$,
 $\therefore CE = DE = EG = \frac{1}{2}$,
 即 E 为 CD 的中点 ,
 $\therefore \angle EGD = \angle EDG = \angle GEB = \angle CEB$,
 $\therefore DG \parallel EB$,
 故①正确 ;
 当 E 为 CD 的中点时 , 由①可知 ,
 此时 $AF = \frac{1}{3}$, $DF = \frac{2}{3}$,
 $EG = CE = \frac{1}{2}$, $EF = \frac{5}{6}$,
 过点 G 作 $GH \perp CD$ 于 H ,
 $\therefore HG \parallel DF$,

$$\begin{aligned}\therefore \frac{HG}{DF} &= \frac{EG}{EF} = \frac{3}{5}, \\ \therefore HG &= \frac{3}{5}DF = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}, \\ \therefore S_{\triangle DEG} &= \frac{1}{2}DE \cdot GH \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

故②错误；

当 $AF = CE = m$ 时， $EF = 2m$ ，

$$\therefore DE = DF = 1 - m,$$

在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中， $DE^2 + DF^2 = EF^2$ ，

$$\therefore \sqrt{2}DE = EF,$$

$$\therefore \sqrt{2}(1 - m) = 2m,$$

$$\therefore \sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})m,$$

$$\therefore m = \sqrt{2} - 1,$$

$$\text{即 } AF = \sqrt{2} - 1,$$

故③正确；

设 $AF = a$ ， $CE = b$ ，则 $EF = a + b$ ，

$$DF = 1 - a, DE = 1 - b,$$

在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中， $(1 - a)^2 + (1 - b)^2 = (a + b)^2$ ，

$$\therefore 1 - 2a + a^2 + 1 - 2b + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$\therefore ab = 1 - a - b,$$

$$\therefore AF \cdot CE = 1 - (a + b) = 1 - EF,$$

$$\therefore BG = BC = 1,$$

$$\therefore BG \cdot EF = EF,$$

$$\therefore AF \cdot CE + BG \cdot EF = 1 - EF + EF = 1,$$

$$\text{即 } AF \cdot CE + BG \cdot EF = 1,$$

故④正确。

$\therefore$ 正确的是①③④。

故选C。

【标注】【知识点】正方形中的半角模型

练习6

14.

已知，正方形 $ABCD$ 中， $\angle MAN = 45^\circ$ ， $\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 BC 、 DC （或它们的延长线）于点 M 、 N ， $AH \perp MN$ 于点 H 。

- (1) 如图①，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM = DN$ 时，请你直接写出 AH 与 AB 的数量关系：_____。

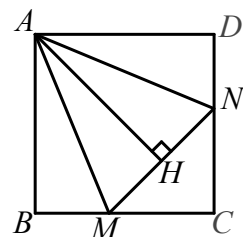


图 ①

- (2) 如图②，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时，(1)中发现的 AH 与 AB 的数量关系还成立吗？如果不成立请写出理由。如果成立请证明。

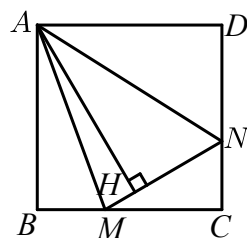


图 ②

- (3) 如图③，已知 $\angle MAN = 45^\circ$ ， $AH \perp MN$ 于点 H ，且 $MH = 2$ ， $NH = 3$ ，求 AH 的长。（可利用(2)得到的结论）。

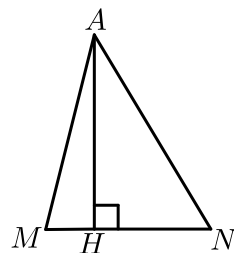


图 ③

【答案】 (1) $AH = AB$

(2) 成立，证明见解析。

(3) AH 的长为6。

【解析】 (1) $AH = AB$

(2) 方法一：成立，理由如下：

如图，将 $\triangle ABM$ 绕点 A 旋转 90° ，由于 $AB = AD$ ，

$\therefore$ 旋转后 B 点与 D 点对应， M 点与 M' 点对应。

由旋转可知 $\triangle ABM \cong \triangle ADM'$ ，

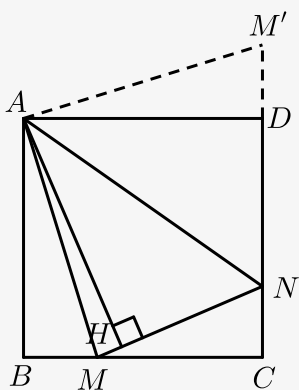
$$\therefore \angle MAN = \angle M'AN = 45^\circ.$$
$$\begin{cases} AN = AN \\ \angle MAN = \angle M'AN, \\ AM = AM' \end{cases}$$
$$\therefore AD = AH, \therefore AB = AH.$$

•

• •

$$\therefore \angle MAN = \angle M'AN = 45^\circ.$$
$$\begin{cases} AN = AN \\ \angle MAN = \angle M'AN, \\ AM = AM' \end{cases}$$
$$\therefore AD = AH, \therefore AB = AH.$$

作 $\triangle ANH$ 关于直线 AN 的对称 $\triangle AND$,



$\because AH$ 是 $\triangle AMN$ 的高,

$\therefore \angle AHM = \angle AHN = 90^\circ$,

$\therefore \angle B = \angle D = 90^\circ$.

又 $\because \angle MAN = 45^\circ$,

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$.

延长 BM 、 DN 交于点 C ,

则四边形 $ABCD$ 是矩形,

又 $\because AB = AH = AD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

由(1)、(2)知: $BM = HM = 2$, $DN = HN = 3$,

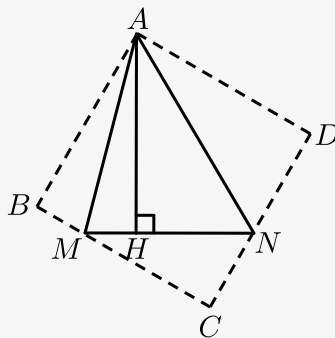
设 $AH = x$, 则 $BC = AB = AH = DC = x$,

$\therefore MC = x - 2$, $NC = x - 3$, $MN = 5$,

在 $\text{Rt}\triangle MCN$ 中, $(x - 2)^2 + (x - 3)^2 = 5^2$,

解得 $x_1 = 6$, $x_2 = -1$,

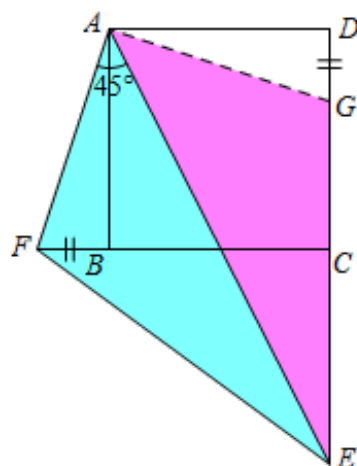
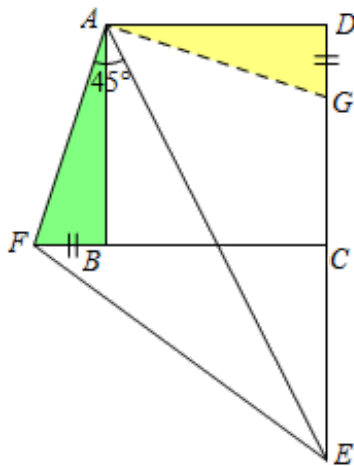
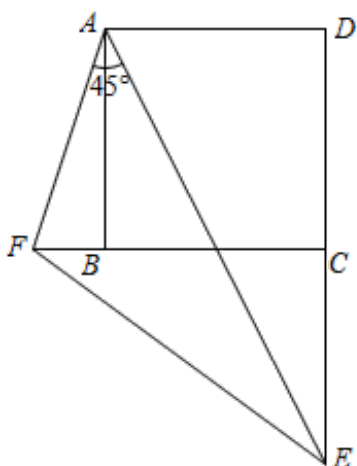
故 AH 的长为6.



【标注】【知识点】正方形与全等综合

半角在倍角外

如图, 正方形 $ABCD$, $\angle EOF = 45^\circ$, 旋转 $\angle EOF$ 与 DC 的延长线交于点 E , 与 CB 的延长线交于点 F



【教法备注】

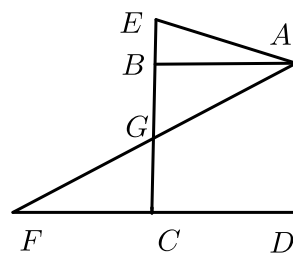
辅助线：在 CD 截取 $DG = BF$ ，连接 AG 。（截长法）

结论：

- ① 截长全等： $\triangle ABF \cong \triangle ADG$ ，理由SAS。
- ② 对称全等： $\triangle EAG \cong \triangle EAF$ ，理由SAS。
- ③ $EF = DE - BF$ 。
- ④ AE 平分 $\angle DEF$ 。

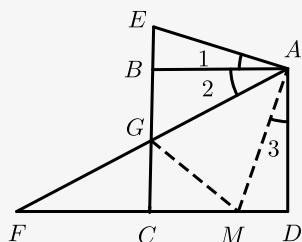
|| 例题7

15. 如图，正方形 $ABCD$ 边长 $AB = 3$ ，点 E, F 分别是 CB, DC 延长线上的点，连接 AF 交 CB 于点 G ，若 $BE = 1$ ，连接 AE ，且 $\angle EAF = 45^\circ$ ，则 AG 长为 _____。



【答案】 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

【解析】如图，在 CD 上截取 $DM = 1$ ，连接 AM, GM 。



则 $\triangle EBA \cong \triangle MDA$ (SAS) ,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$, $AE = AM$.

又 $\angle EAF = 45^\circ$, 即 $\angle 1 + \angle 2 = 45^\circ$.

$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 45^\circ$.

$\therefore \angle GAM = 90^\circ - (\angle 2 + \angle 3) = 45^\circ$.

$\therefore \triangle GAM = 90^\circ - (\angle 2 + \angle 3) = 45^\circ$.

$\therefore \triangle EAG \cong \triangle MAG$ (SAS) .

$\therefore GM = EG = 3 - GC + 1 = 4 - GC$.

在 $\text{Rt}\triangle GCM$ 中 , $CM = 3 - 1 = 2$.

$\therefore GC^2 + 2^2 = (4 - GC)^2$ 解得 : $GC = \frac{3}{2}$.

$\therefore BG = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

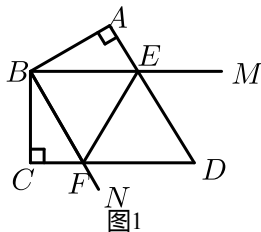
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , $AG = \sqrt{AB^2 + BG^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

【标注】【知识点】方程思想在勾股定理的应用；多边形中的半角模型

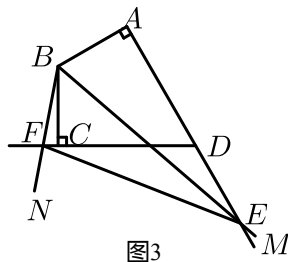
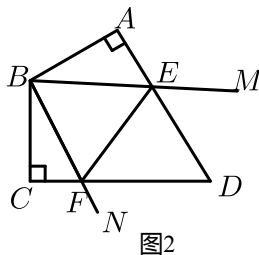
练习7

16. 已知四边形 $ABCD$ 中 , $AB \perp AD$, $BC \perp CD$, $AB = BC$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle MBN = 60^\circ$, $\angle MBN$ 绕 B 点旋转 , 它的两边分别交 AD , DC (或它们的延长线) 于 E , F .

(1) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE = CF$ 时 (如图1) , 试猜想 AE , CF , EF 之间存在怎样的数量关系 ? 请将三条线段分别填入后面横线中 : _____ + _____ = _____ . (不需证明)



(2) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE \neq CF$ 时 , 在图2和图3这两种情况下 , 上问的结论是否仍然成立 ? 若成立 , 请给出证明 ; 若不成立 , 那么这三条线段又有怎样的数量关系 ? 请写出你的猜想 , 不需证明 .



【答案】(1) $AE; CF; EF$

(2) 图2, (1) 中结论成立; 图3中的结论不成立, $AE = EF + CF$.

【解析】(1) 如图1, $AE + CF = EF$,

理由: $\because AB \perp AD, BC \perp CD, AB = BC, AE = CF$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle A = \angle C = 90^\circ, \\ AE = CF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF (\text{SAS})$;

$\therefore \angle ABE = \angle CBF, BE = BF$;

$\because \angle ABC = 120^\circ, \angle MBN = 60^\circ$,

$\therefore \angle ABE = \angle CBF = 30^\circ$,

$\therefore AE = \frac{1}{2}BE, CF = \frac{1}{2}BF$;

$\because \angle MBN = 60^\circ, BE = BF$,

$\therefore \triangle BEF$ 为等边三角形;

$\therefore AE + CF = \frac{1}{2}BE + \frac{1}{2}BF = BE = EF$;

故答案为: AE, CF, EF .

(2) 如图2, (1) 中结论成立

证明: 延长 FC 到 H , 使 $CH = AE$, 连接 BH ,

$\because AB \perp AD, BC \perp CD$,

$\therefore \angle A = \angle BCH = 90^\circ$,

$\therefore$ 在 $\triangle BCH$ 和 $\triangle BAE$ 中

$$\begin{cases} BC = AB \\ \angle BCH = \angle A, \\ CH = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCH \cong \triangle BAE (\text{SAS})$,

$\therefore BH = BE, \angle CBH = \angle ABE$,

$\because \angle ABC = 120^\circ, \angle MBN = 60^\circ$,

$\therefore \angle ABE + \angle CBF = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$,

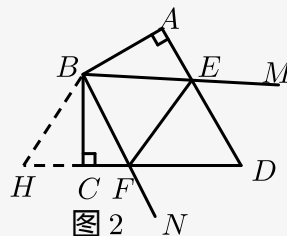
$\therefore \angle HBC + \angle CBF = 60^\circ$,

$\therefore \angle HBF = 60^\circ = \angle MBN$,

在 $\triangle HBF$ 和 $\triangle EBF$ 中

$$\begin{cases} BH = BE \\ \angle HBF = \angle EBF, \\ BF = BF \end{cases}$$

$\therefore \triangle HBF \cong \triangle EBF (\text{SAS})$,



$$\therefore HF = EF,$$

$$\therefore HF = HC + CF = AE + CF,$$

$$\therefore EF = AE + CF.$$

图3中的结论不成立，线段 AE 、 CF 、 EF 的数量关系是 $AE = EF + CF$ ，

证明：在 AE 上截取 $AQ = CF$ ，连接 BQ ，

$$\because AB \perp AD, BC \perp CD,$$

$$\therefore \angle A = \angle BCF = 90^\circ,$$

在 $\triangle BCF$ 和 $\triangle BAQ$ 中

$$\begin{cases} BC = AB \\ \angle BCF = \angle A, \\ CF = AQ \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCF$ 和 $\triangle BAQ$ (SAS),

$$\therefore BF = BQ, \angle CBF = \angle ABQ,$$

$$\therefore \angle MBN = 60^\circ = \angle CBF + \angle CBE,$$

$$\therefore \angle CBE + \angle ABQ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle QBE = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ = \angle MBN,$$

在 $\triangle FBE$ 和 $\triangle QBE$ 中

$$\begin{cases} BF = BQ \\ \angle FBE = \angle QBE, \\ BE = BE \end{cases}$$

$\therefore \triangle FBE \cong \triangle QBE$ (SAS),

$$\therefore EF = QE,$$

$$\therefore AE = QE + AQ = EF + CF,$$

$$\therefore AE = EF + CF,$$

即(1)中的结论不成立，线段 AE 、 CF 、 EF 的数量关系是 $AE = EF + CF$ 。

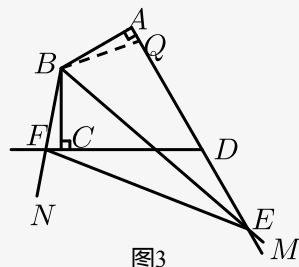
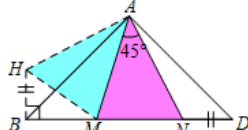
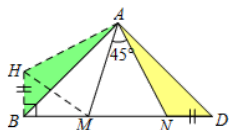
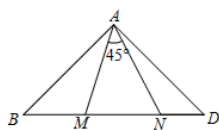


图3

【标注】【知识点】半角模型

|| 角含半角的平方关系

🕒 半角在倍角内：如图，等腰直角 $\triangle ABD$ ， $AB = AD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle MAN = 45^\circ$ 。



【教法备注】

辅助线：过点 B 作 $BH \perp BD$ ，并截取 $BH = DN$ ，连接 AH ， MH 。

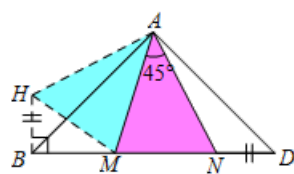
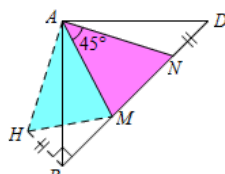
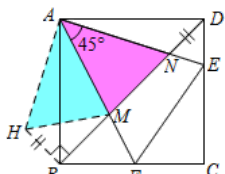
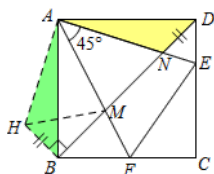
结论：

①利用SAS推出 $\triangle ABH \cong \triangle ADN$ ， $AH = AN$ ， $\angle BAH = \angle DAN$ 。

②利用SAS推出 $\triangle MAH \cong \triangle MAN$ ， $MH = MN$ 。

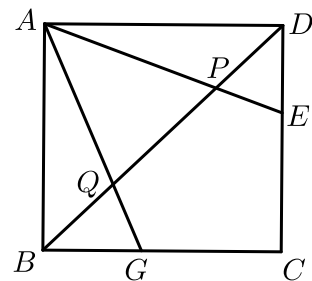
③ $MN^2 = BM^2 + DN^2$ 。

模型的演变



例题8

17. 如图，点 E 、 G 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CD 、 BC 上的点，连接 AE 、 AG 分别交对角线 BD 于点 P 、 Q ，若 $\angle EAG = 45^\circ$ ， $BQ = 4$ ， $PD = 3$ ，则正方形 $ABCD$ 的边长为 _____。



【答案】 $6\sqrt{2}$

【解析】 如图，延长 CB 到 F ，使 $BF = DE$ ，连接 AF ，在 AF 上取 $AH = AP$ ，连接 HQ 。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB = BC = CD = AD$ ， $\angle 4 = \angle 5 = 45^\circ$ ， $\angle BAD = \angle ADE = \angle ABF = 90^\circ$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 和 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABF = \angle ADE \\ BF = DE \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle ADE (\text{SAS})$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ 。

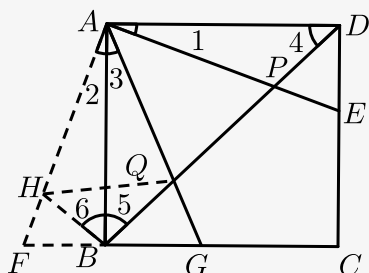
$\therefore \angle GAF = \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 3 = \angle BAD - \angle EAG = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle EAG$

，

$\therefore \triangle PAQ \cong \triangle HAQ (\text{SAS})$ ， $\triangle DAP \cong \triangle BAH (\text{SAS})$ ，

$\therefore \angle 6 = \angle 4 = 45^\circ$ ， $BH = PD = 3$ ，

$$\begin{aligned}\therefore \angle QBH &= \angle 6 + \angle 5 = \angle 4 + \angle 5 = 90^\circ, \\ \therefore BH^2 + BQ^2 &= 3^2 + 4^2 = HQ^2 = PQ^2, \\ \therefore PQ &= HQ = 5, \\ \therefore BD &= 12, \\ \therefore AD = AB &= \frac{\sqrt{2}}{2} BD = 6\sqrt{2}.\end{aligned}$$

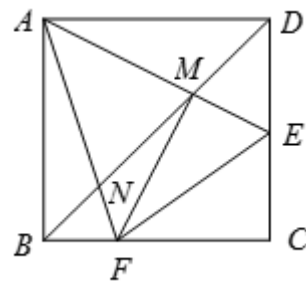


【标注】【知识点】直接用勾股求边长；正方形中的半角模型

练习8

18. 如图，正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 为 CD 、 CB 上的点， $\angle EAF = 45^\circ$ ， BD 交 AE ， AF 于 M 、 N ，连接 MF 、 EF ，下列结论：

① $MN^2 = BN^2 + DM^2$ ；② $DE + BF = MF + ME$ ；③ $AM = MF$ 且 $AM \perp MF$ ；④若 E 为 CD 的中点，则 $\frac{BF}{BC} = \frac{1}{3}$ ，其中正确的有（ ）。



A. 4个

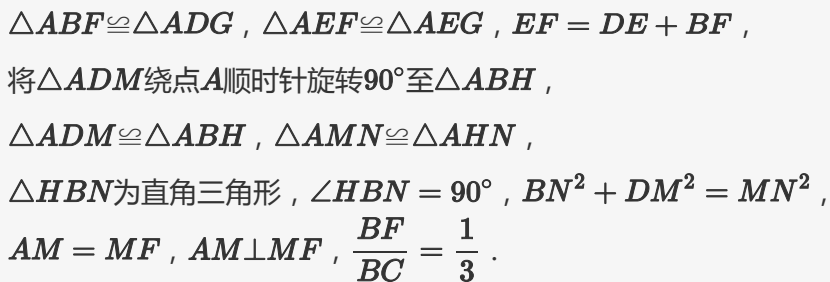
B. 3个

C. 2个

D. 1个

【答案】B

【解析】如图，将 $\triangle ABF$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$ ，

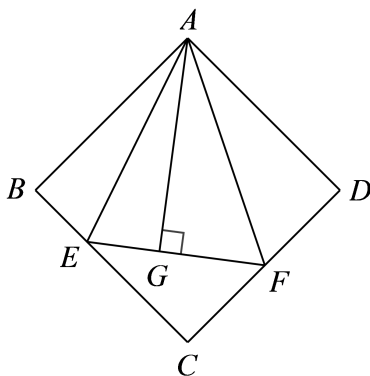


【标注】【知识点】正方形中的半角模型

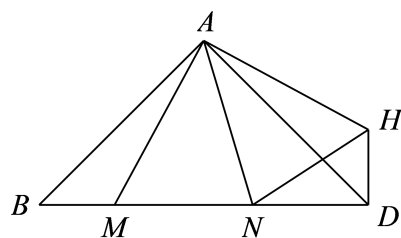
练习9

19. 解答下列问题：

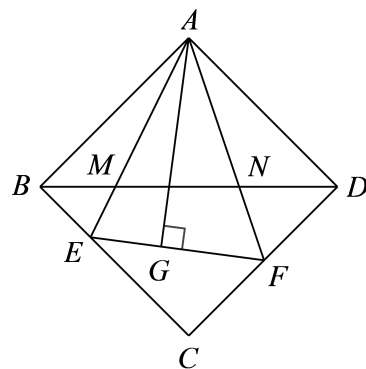
- (1) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $\triangle AEF$ 的顶点 E 、 F 分别在 BC 、 CD 边上, 高 AG 与正方形的边长相等, 求 $\angle EAF$ 的度数.



- (2) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle BAD = 90^\circ$, $AB = AD$, 点 M 、 N 是 BD 边上的任意两点, 且 $\angle MAN = 45^\circ$, 将 $\triangle ABM$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADH$ 位置, 连接 NH , 试判断 MN 、 ND 、 DH 之间的数量关系, 并说明理由.



- (3) 如图, 在第 (1) 问的条件下, 连接 BD 分别交 AE 、 AF 于点 M 、 N , 若 $EG = 4$, $GF = 6$, $BM = 3\sqrt{2}$, 求 AG 、 MN 的长.



【答案】 (1) 45° .

(2) $MN^2 = ND^2 + DH^2$.

(3) $AG = 12$, $MN = 5\sqrt{2}$.

【解析】 (1) 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 和 $\text{Rt}\triangle AGE$ 中,

$$\begin{cases} AE = AE \\ AB = AG \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle AGE (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle BAE = \angle GAE.$$

$$\text{同理, } \angle GAF = \angle DAF,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle EAG + \angle GAF = \frac{1}{2} \angle BAD = 45^\circ.$$

(2) $MN^2 = ND^2 + DH^2$.

$$\text{理由: 由旋转可知, } \angle BAM = \angle DAH,$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ, \angle MAN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM + \angle DAN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle HAN = \angle DAH + \angle DAN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle HAN = \angle MAN.$$

$$\text{又} \because AM = AH, AN = AN,$$

$$\therefore \triangle AMN \cong \triangle AHN (\text{SAS}),$$

$$\therefore MN = HN .$$

$$\because \angle BAD = 90^\circ , AB = AD ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB = 45^\circ ,$$

$$\text{又} \angle HDA = \angle MBA ,$$

$$\therefore \angle HDN = \angle HDA + \angle ADB = 90^\circ ,$$

$$\therefore NH^2 = ND^2 + DH^2 ,$$

$$\therefore MN^2 = ND^2 + DH^2 .$$

(3) 由 (1) 知 , $BE = EG , DF = FG$.

设 $AG = x$, 则 $CE = x - 4 , CF = x - 6$.

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中 ,

$$\therefore CE^2 + CF^2 = EF^2 ,$$

$$\therefore (x - 4)^2 + (x - 6)^2 = (4 + 6)^2 ,$$

解得 $x_1 = 12 , x_2 = -2$ (舍去) ,

$$\therefore AG = 12 .$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中 ,

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2AG^2} = 12\sqrt{2} .$$

在 (2) 中 , $MN^2 = ND^2 + DH^2 , BM = DH$,

$$\therefore MN^2 = ND^2 + BM^2 .$$

设 $MN = a$, 则

$$a^2 = (12\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - a)^2 + (3\sqrt{2})^2 ,$$

$$\text{即} a^2 = (9\sqrt{2} - a)^2 + (3\sqrt{2})^2 ,$$

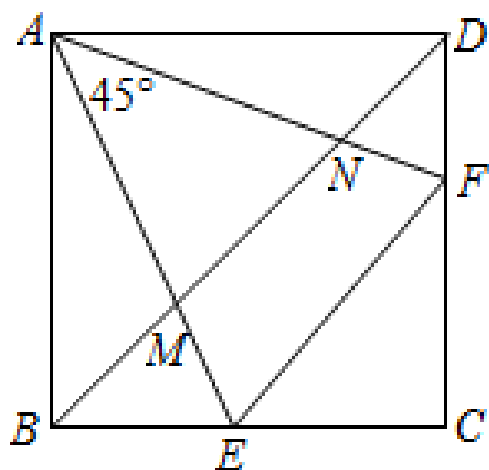
$$\therefore a = 5\sqrt{2} ,$$

$$\text{即} MN = 5\sqrt{2} .$$

【标注】【知识点】正方形与全等综合

正方形内角含半角模型总结

已知正方形 $ABCD$ ， $\angle EAF = 45^\circ$ 。

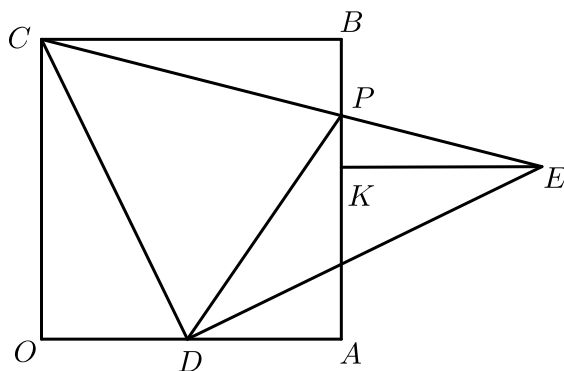


【结论】

- ① $EF = BE + DF$;
- ② $MN^2 = BM^2 + DN^2$;
- ③ AE 平分 $\angle BEF$, AF 平分 $\angle CFE$;
- ④ 点 A 到 EF 的距离 $= AB$.
- ⑤ $\triangle CEF$ 周长 $= 2AB$

练习10

20. 如图，四边形 $OABC$ 为正方形，在 OA 边上有一点 D ，以 CD 为直角边构造等腰 $Rt\triangle CDE$ ， CE 交 AB 于点 P ，过点 E 作 AB 垂线交 AB 于 K ，若 $BP = 4$ ， $PD = 10$ 且 $OC + EK = 18$ ，试求出 PK 的长度。



【答案】 $PK = 8 - 6 = 2$.

【解析】 在 AO 延长线上截取 $OH = BP = 4$ ，

并连接 CH ，过 E 作 DA 延长线的垂线交于点 Q ，则 $\triangle COH \cong \triangle CBP$ (SAS)，

$\therefore CH = CP$ 且 $\angle HCO = \angle PCB$ ，

$\therefore \angle HCP = 90^\circ$ ，

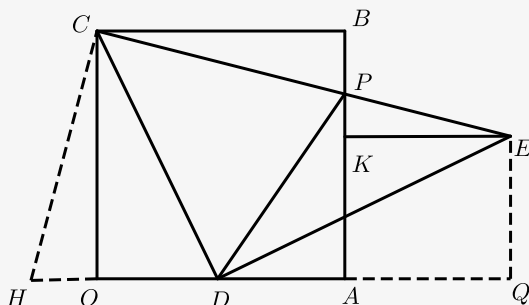
$\therefore \angle DCP = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle HCD = \angle DCP = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle HCD \cong \triangle PCD$ (SAS)， $\therefore DH = DP = 10$ ，

$\therefore OD = 6$ ，

$\because \triangle CDO \cong \triangle DEQ$,
 $\therefore DQ = CO$ 且 $EQ = OD = 6$,
 又 $\because OA = CO$,
 $\therefore AQ = OD = 6$,
 $\therefore KE = 6$,
 $\therefore OC = 12$,
 $\therefore DA = 6$,
 $\therefore AP = 8$, $\therefore PK = 8 - 6 = 2$.

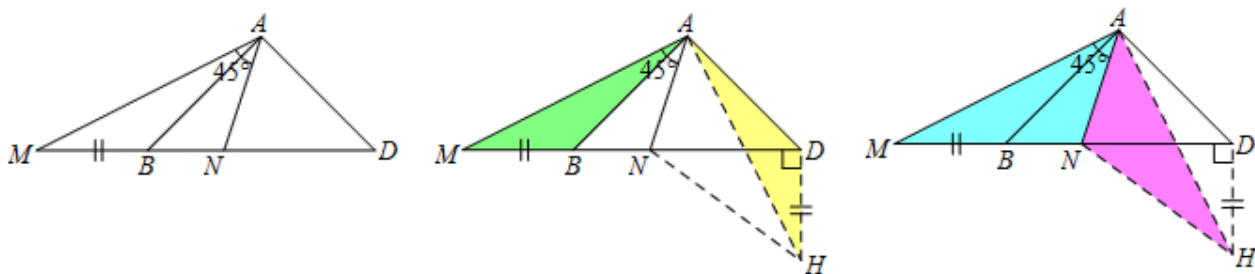


【标注】【知识点】正方形与全等综合

独步天下

半角在倍角外

如图，等腰直角 $\triangle ABD$ ， $AB = AD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle MAN = 45^\circ$ 。



【教法备注】

辅助线：过点 D 作 $DH \perp BD$ ，并截取 $DH = BM$ ，连接 AH ， NH 。

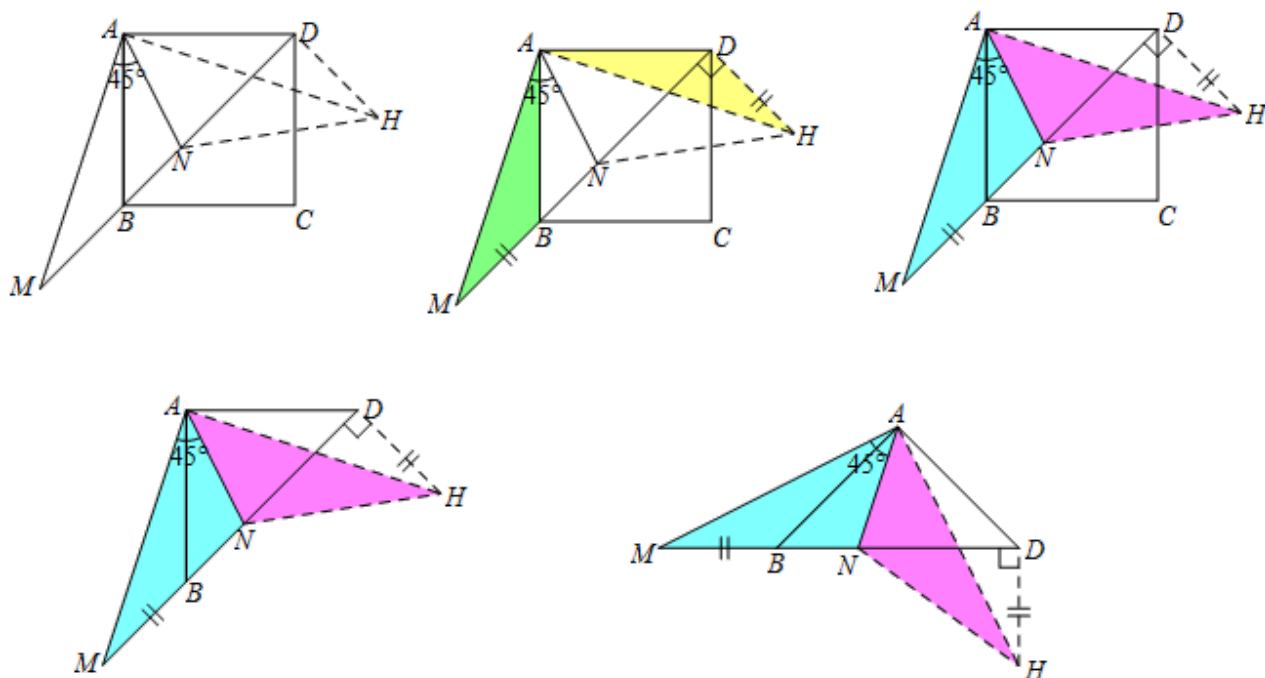
结论：

①利用SAS推出 $\triangle ADH \cong \triangle ABM$ ， $AH = AM$ ， $\angle DAH = \angle BAM$ 。

②利用SAS推出 $\triangle NAH \cong \triangle NAM$, $NH = MN$.

③ $MN^2 = BM^2 + DN^2$.

模型的演变



21. 按要求解答以下问题：

(1) 问题背景：

如图1，在正方形 $ABCD$ 中，点 M ， N 分别在边 BC ， CD 上，连接 MN ，且 $\angle MAN = 45^\circ$ ，将 $\triangle AND$ 绕点 A 顺时针旋转 90° ，得到 $\triangle ABG$ ，可证 $\triangle AMG \cong \triangle AMN$ ，易得线段 MN 、 BM 、 DN 之间的数量关系为 _____（直接填写）。

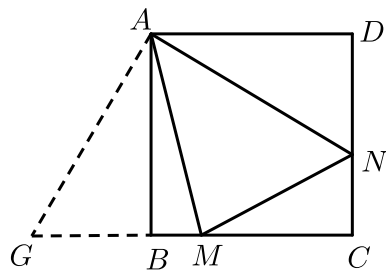
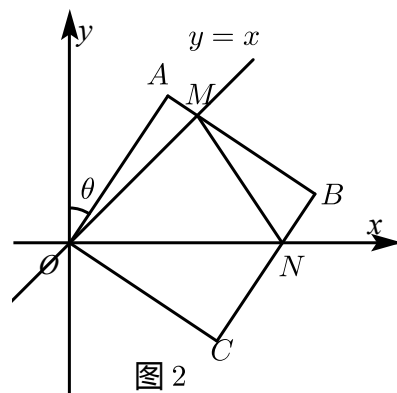


图 1

(2) 实践应用：

在平面直角坐标系中边长为5的正方形 $OABC$ 的两顶点 A 、 C 分别为 y 轴 x 轴的正半轴上， O 在原点，现将正方形 $OABC$ 绕点 O 按顺时针方向旋转，旋转角为 θ ，当点 A 第一次落在直线 $y = x$ 上时停止旋转，旋转过程中， AB 边交直线 $y = x$ 于点 M ， BC 边交 x 轴于点 N ，如图2

，设 $\triangle MBN$ 的周长为 P ，在旋转正方形 $OABC$ 的过程中， P 值是否有变化？请证明你的结论．



(3) 拓展研究：

如图3将正方形改为长与宽不相等的矩形，且 $\angle MAN = \angle CMN = 45^\circ$ ，请你直接写出线段 MN 、 BM 、 DN 之间的数量关系．

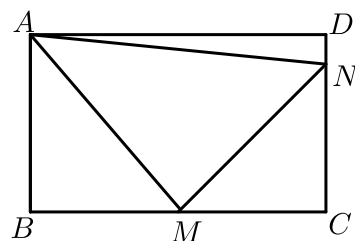


图 3

【答案】 (1) $MN = BM + DN$

(2) 没有变化．证明见解析．

(3) $MN^2 = 2BM^2 + 2DN^2$ ．证明见解析．

【解析】 (1) 由旋转，可知： $DN = BG$ ，

$$\because \triangle AMG \cong \triangle AMN,$$

$$\therefore MG = MN,$$

$$\because MG = BM + BG = BM + DN,$$

$$\therefore MN = BM + DN.$$

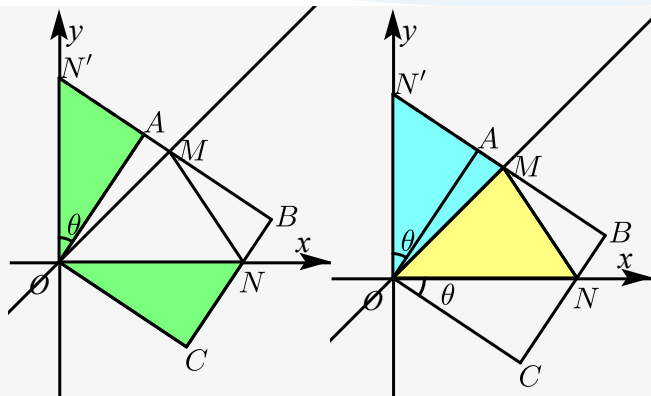
(2) 方法一：利用旋转角

延长 BA 交 y 轴于点 N' ．由 $\angle N'OA = \angle NOC = \theta$ ， $\angle N'AO = \angle C = 90^\circ$ ，

$OA = OC$ 可证两个绿色三角形全等，由直线 $y = x$ 可知 $\angle MON = 45^\circ$ ，利用(1)

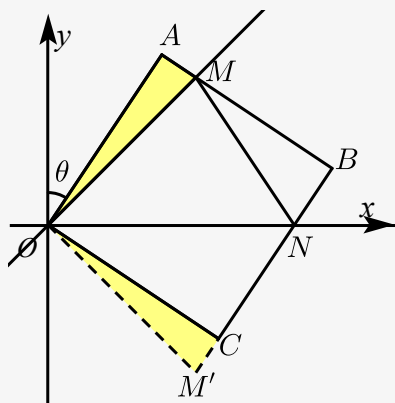
中方法易证黄蓝三角形全等，可得 $MN = AM + CN$ ．则 $P = AB + BC = 10$

．



方法二：利用共顶点直角

构造黄色三角形全等，进而 $\triangle OMN \cong \triangle OM'N$ ，与方法一相同。



(3) 为了研究此问方便，统一表示 $BM = m$ ， $DN = n$ ， $MC = k$ ，则

$MN = \sqrt{2}k$ 。只需证明 $(\sqrt{2}k)^2 = 2m^2 + 2n^2$ 或 $k^2 = m^2 + n^2$ 即可，由后者我们也不难得出 $MC^2 = BM^2 + DN^2$ 这一延伸结论。

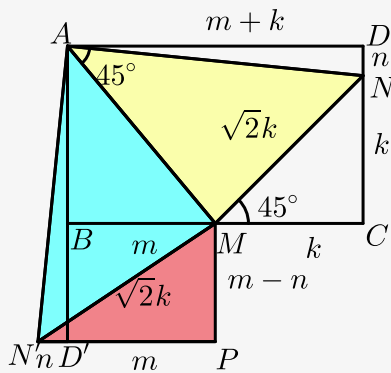
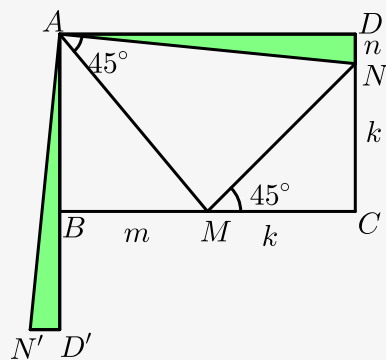
以下提供几条解决策略，同一策略下所做辅助线不同但思路相同的不再赘述。

策略一：利用旋转

由前两问的经验出发首先就会考虑旋转绿色三角形，全等后还有黄蓝两个三角形全等，为了进一步找到三条线段关系构造如图红色直角三角形：

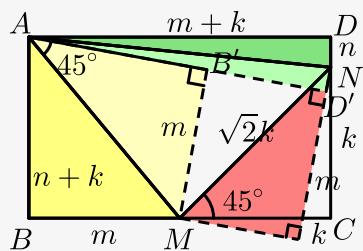
$$(\sqrt{2}k)^2 = (m+n)^2 + (m-n)^2 = 2m^2 + 2n^2,$$

$$\text{即 } MN^2 = 2BM^2 + 2DN^2.$$



策略二：利用对称

两个黄色三角形关于 AM 对称，可得两个绿色三角形也对称，再构造红色三角形使用勾股定理，思路过程与策略一相同。



策略三：化矩为方

延长 MN ，与 AB ， AD 延长线交于 F 、 E ，不难看出 $\triangle AEF$ 是一个等腰直角三角形，即正方形的一半，这里有我们熟知的正方形中半角模型的另一个结论：

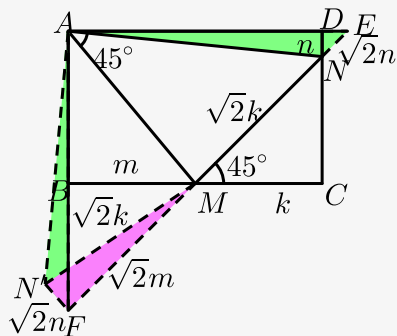
$$MN^2 = FM^2 + EN^2, \text{ 易得}$$

$$MN^2 = 2BM^2 + 2DN^2$$

如不能直接回忆起该结论，可以考虑绿色三角形全等，

再得出 $\triangle AMN \cong \triangle AMN'$ ，

最后在紫色三角形中使用勾股定理。

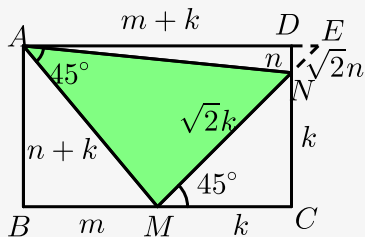


策略四：利用相似

（方法一）由受到上图启发，构造 $\angle E = 45^\circ$ 即可得到绿色三角形与 $\triangle AME$ 相似，则

$$MA^2 = MN \cdot ME, \text{ 即 } (n+k)^2 + m^2 = \sqrt{2}k(\sqrt{2}k + \sqrt{2}n)$$

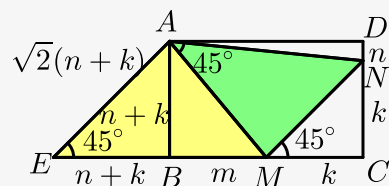
$$\therefore (\sqrt{2}k)^2 = 2m^2 + 2n^2.$$



（方法二）由以 M 为顶点的三个角的关系可知 $\angle BMA = \angle ANM$ ，只要再构造一个 45° 角（ $\angle E$ ）即可得黄绿两个三角形相似，则 $MA^2 = MN \cdot AE$ ，即

$$(n+k)^2 + m^2 = \sqrt{2}k \cdot \sqrt{2}(n+k)$$

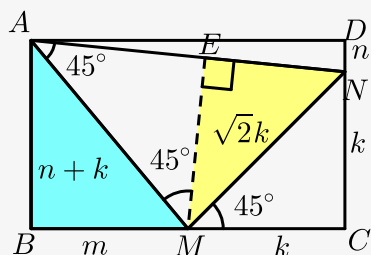
$$\therefore (\sqrt{2}k)^2 = 2m^2 + 2n^2.$$



(方法三) 既然知 $\angle BMA = \angle ANM$ ，搭配直角也是很方便的，这是做辅助线最少的方法了．蓝黄两个三角形相似可得 $MA \cdot ME = MN \cdot AB$ ，

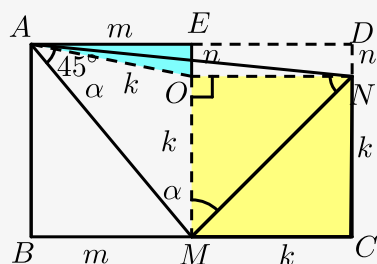
$$(n+k)^2 + m^2 = 2k(n+k)$$

$$\therefore (\sqrt{2}k)^2 = 2m^2 + 2n^2.$$



策略五：巧找外心

翻折 $\triangle CMN$ ，得到黄色正方形，由角的关系可知 $OA = OM = ON$ ，即 O 为 $\triangle AMN$ 的外心，在蓝色直角三角形中可得 $k^2 = m^2 + n^2$ ．



【标注】【知识点】正方形与全等综合